Faculté de Médecine Alger
1ière année Médecine

Année 2014/2015

Série 3 : Biostatistique *Probabilités*

Exercice 1 :

On considère les élèves d'une classe. Trois langues leur sont proposées comme option, le russe, l'italien et l'espagnol. Les élèves peuvent n'en choisir aucune, en choisir une, deux ou les trois. On note C l'ensemble des élèves composant cette classe, R l'ensemble des élèves choisissant le Russe, I l'ensemble des élèves choisissant l'italien et E ceux pratiquant l'espagnol.

1. Traduire en français les ensembles suivants $R \cap E$, $R \cup I$, $\overline{I}$, $\overline{I \cap E}$.
2. Traduire en utilisant le formalisme ensembliste
   - Les élèves qui font russe et espagnol
   - Les élèves qui ne parlent aucune des trois langues
   - Les élèves qui parlent au moins une des trois langues

Exercice 2 :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants :

A : "La carte tirée est un roi", B : "La carte tirée est un trèfle"
C : "La carte tirée est une carte noire"

1. Définir par une phrase les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $B \cup C$ et $A \cup B \cup C$.
2. Calculer les probabilités de A, B, C et des événements ci-dessus.

Exercice3 :

Soient A et B 2 événements tels que $P(A)=1/2$, $P(B)=1/4$ et $P(A \cap B)=1/8$. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. E= « au moins un événement se réalise » ;
2. F= « aucun événement ne se réalise»
3. G=« un seul événement se réalise »

Exercice 4 :

Une urne contient quatre boules numérotées 10, 20, 30 et 40. On effectue trois tirages successifs avec remise, c'est-à-dire qu'après chaque tirage on replace la boule tirée dans l'urne.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les cas suivants :
   a) La première boule tirée porte le numéro 10, la deuxième le numéro 40, la troisième le numéro 20 ?
   b) La première boule tirée porte le numéro 30 et la deuxième le numéro 20 ?
   c) La deuxième boule porte le numéro 20

Exercice 5 :

L'épreuve de Biostatistique comprend 45 questions avec 5 propositions de réponses mais une seule est correcte. Un étudiant est sûr d'avoir répondu correctement à 22 questions sur les 45. Sur les 23 questions restantes, il a répondu au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait au moins 23 bonnes réponses à l'épreuve ?

Exercice 6 :

On appelle « épreuve » un lot de 4 sujets tirés au sort parmi 100 sujets possibles. Il s'agit de traiter l'un des sujets au choix. Un candidat se présente en ne connaissant que 30 sujets.
Quelle est la probabilité qu'il sache traiter :

1. aucun sujet ?
2. les 4 sujets ?
3. 3 sujets ?
4. au moins un sujet ?

Exercice 7 :

A, B et C sont des événements. On sait que : $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cap B) = 0,2$;
$P(\overline{C}) = 0,4$. On sait également que A et C sont incompatibles.

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Les événements A et B sont-ils indépendants?
3. Calculer : $P(C)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cup C)$

Exercice 8 :

On effectue 3 tirs vers la même cible. Les probabilités d'atteindre la cible au 1^{ier}, 2ième , 3ième coup sont respectivement $p_1=0,4$ $p_2=0,5$ et $p_3=0,7$. Quelle est la probabilité :

1. de n'avoir atteint la cible qu'une fois après les 3 tirs ?
2. d'atteindre la cible au moins une fois ?

Exercice 9 :

Trois dés sont truqués de sorte que, pour chaque dé, la probabilité d'avoir le « 1 » est 2 fois plus grande que celle d'avoir n'importe quel autre numéro. Quelle est la probabilité de sortir, sur un lancer de 3 dés, 421 ? (dans cet ordre et dans le désordre)

Exercice 10 :

Soit une population composée de 48% d'hommes. On suppose que 13% des hommes et 12% des femmes sont diabétiques.

1. Une personne est choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit diabétique ?
2. Sachant qu'une personne est diabétique, quelle est la probabilité que cela soit un homme ?
3. Si une personne n'est pas diabétique, quelle est la probabilité que cela soit une femme ?

Exercice 11 :

Un test est utilisé pour dépister une maladie. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99 % des cas. Cependant, il se peut que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé, et ceci se produit dans 2 % des cas.
Sachant qu'en moyenne un patient sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que le test a été positif ?

Exercice 12 :

On dispose de 4 jetons : A,B,C et D tels que A et B ont 2 faces blanches, C a une face noire et une face blanche et D a deux faces noires. On tire un jeton au hasard et on ne voit qu'une de ses faces elle est blanche. Calculer la probabilité pour que l'autre face soit blanche

QCM (une seule bonne réponse)

Exercice 1 : 1QCM

QCM 1

Dans une population où 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie, et 30% sont vaccinés contre les deux maladies.
Quelle est la probabilité, pour un individu choisi au hasard, de n'être vacciné contre aucune des deux maladies ?

A : 75% B : 25% C : 50% D :85% E :aucune de ces réponses

Exercice2 : 2 QCM

QCM 2

La prévalence du diabète de type 2 est de 5% dans la population générale. La probabilité d'observer simultanément un cancer du pancréas et un diabète de type 2 est de 4/1000000. Quelle est la probabilité d'observer un cancer du pancréas chez un diabétique de type 2 ?

A : 1/20 B : 4/100 000 C : 2/10 000 000 D : 8/100 000 E :aucune de ces réponses

QCM 3

Sachant que la prévalence du cancer du pancréas est de 8/100 000, que peut-on dire des deux événements « cancer du pancréas » et un « diabète de type 2 » ?

A ils sont indépendants B ils sont incompatibles C Ils sont équiprobables
D Ils sont liés E :aucune de ces réponses

Exercice 3 : 2 QCM

Avant la réforme du concours du résidanat, la population des étudiants en médecine a été classée en fonction de l'âge (âge inférieur à 22ans= événement A) et son attitude face au maintien du concours (pour le concours=événement I). On obtient le tableau suivant

	Pour le concours (I)	Contre le concours
Moins de 22 ans (A)	7,8%	32,2%
Plus de 22 ans	18,2%	41,8%

QCM 4

La probabilité pour qu'un étudiant de médecine choisi au hasard soit pour le concours est

A : comprise entre 0 et 0,20 ; B : comprise entre 0,20 et 0,40 ; C : comprise entre 0,40 et 0,60 ; D : comprise entre 0,6 et 0,80 ; E : comprise entre 0,8 et 1.

QCM 5

La probabilité pour qu'un étudiant de médecine âgé de moins de 22 ans soit pour le concours est

A : comprise entre 0 et 0,10 ; B : comprise entre 0,10 et 0,20 ; C : comprise entre 0,20 et 0,30 D : comprise entre 0,30 et 0,40 ; E : comprise entre 0,4 et 0,5.

Exercice 4 : 3QCM

Dans une population présentant une douleur abdominale, 30 % des patients ont une appendicite aiguë. Parmi ces derniers, 70% ont une température corporelle supérieure à 37,5°C, alors que chez des patients sans appendicite, une température supérieure à 37, 5 °C est retrouvée dans 40 % des cas.

QCM 6

la probabilité qu'un patient ait une température corporelle supérieure à 37, 5 °C.

A: 0,43 . B: 0,49 . C: 0,82 D: 0,51 E :aucune de ces réponses

QCM 7

Pour un patient ayant une température supérieure à 37, 5 °C, la probabilité qu'il ait une appendicite aiguë est égale à:

A 0,51 . B: 0,49 . C: 0,82 D: 0,43 E :aucune de ces réponses

QCM 8

Pour un patient n'ayant pas une température supérieure à 37, 5 °C, la probabilité qu'il n'ait pas une appendicite aiguë est égale à :.

A: 0,43 B: 0,49 C: 0,82 D: 0,51 E :aucune de ces réponses

Exercice 5 : **1QCM**

Un dé est truqué de telle sorte que $p(1) = p(2) = p(3) = 1/10$.

On sait d'autre part que $p(4) = p(5) = p(6)$.

QCM 9. La valeur de $p(4)$ est :

A: 0,23 B: 0,77 . C: 0,70 D: 0,3 E :aucune de ces réponses

Exercice 6 : 2QCM

Dans un groupe de 10 souris, deux d'entre elles sont atteintes d'une certaine maladie (non contagieuse). On les identifie en testant les souris l'une après l'autre. Le but est de trouver les deux souris malades.

QCM 10

Quelle est la probabilité que le test soit terminé au bout de deux tirages

A : 0,2 B : 0,040 C : 0,022 D : 0,002 E :aucune de ces réponses

QCM 11

Quelle est la probabilité que le test nécessite plus de trois tirages

A :0,995 B : 0,044 C. 0,0667 D :0,933 E :aucune de ces réponses

Exercice 7 : 4 QCM

A, B et C sont trois événements. On sait que :

$P(A) = 0{,}5$ $P(B) = 0{,}1$ $P(C) = 0{,}7$ $P(B \cup C) = 0{,}8$ $P(A \cap B) = 0{,}3$

QCM 12 Les événements A et B sont indépendants.

QCM 13 Les événements A et B sont incompatibles.

QCM 14 Les événements B et C sont indépendants.

QCM 15 Les événements A et C sont incompatibles.

Grille de réponses

Rép / QCM	A	B	C	D	E
1		X			
2				X	
3	X				
4		X			
5	X				
6		X			
7				X	
5			X		
9	X				
10			X		
11				X	

Rép / QCM	V	F
12		X
13		X
14		X
15	X	

Série 3 :

Rappel :

- L'univers Ω : ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- A : un événement, une partie de Ω.
- $C = A \cup B \rightarrow$ l'événement A ou B.
- $C = A \cap B \rightarrow$ l'événement A et B.
- A et B sont incompatibles $\rightarrow A \cap B = \phi$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

si A et B sont incompatibles $\Rightarrow P(A \cap B) = \phi$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Cas d'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- A et B sont indépendants :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

- Probabilités conditionnelles :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ telque $P(B) \neq 0$. /: sachant

Ex 1 :

1/ • $R \cap E$: l'ensemble des élèves qui choisissent le russe et l'espagnol.

• $R \cup I$: l'ensemble des élèves qui choisissent le russe ou l'italien.

• $\bar{I}$: l'ensemble des élèves qui n'ont pas choisi l'italien.

• $\bar{I} \cap \bar{E}$ ou $\overline{I \cup E}$: l'ensemble des élèves qui n'ont pas choisi l'italien et l'espgnol (ni l'italien ni l'espagnol).

2/ • $R \cap E$.

• $\bar{R} \cap \bar{E} \cap \bar{I}$ ou $\overline{R \cup E \cup I}$

• $R \cup E \cup I$

Ex 2 :

1/ • $\bar{A}$: la carte tirée n'est pas un roi.

• $\bar{B}$: la carte tirée n'est pas un trèfle.

• $\bar{C}$: " " " une carte noire.

• $A \cap B$: " " est un roi trèfle

• $B \cap C$: " " est un trèfle noir.

• $A \cap B \cap C$: " " est un roi trèfle noir.

• $A \cup B$: " " est un roi ou un trèfle.

• $B \cup C$: " " est un trèfle ou une carte noire.

• $A \cup B \cup C$: " " est un roi ou un trèfle ou une carte noire.

2/ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. $\quad |\Omega| = 32$, $|A| = 4$ (4 rois)

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. $\quad |B| = 8$ (8 trèfles)

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ $\quad |C| = 16$ (16 cartes noires)

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = \frac{28}{32}$.

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{24}{32}$.

$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{16}{32}$.

$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{32}$

$P(B \cap C) = \frac{|B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

$P(A\cap B\cap C) = \frac{|A\cap B\cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{32}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

$= \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32}$

$= \frac{11}{32}$

$P(B\cup C) = P(B) + P(C) - P(B\cap C)$.

$= \frac{8}{32} + \frac{16}{32} - \frac{8}{32} = \frac{16}{32}$

$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B)$

$- P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

$= \frac{4}{32} + \frac{8}{32} + \frac{16}{32} - \frac{1}{32} - \frac{2}{32}$

$- \frac{8}{32} + \frac{1}{32}$

$= \frac{20}{32} - \frac{2}{32} = \frac{18}{32}$.

Ex3:

$P(A) = 1/2 \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad P(A\cap B) = \frac{1}{8}$.

1/ $E = P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{4+2-1}{8}$

$= \frac{5}{8}$

2/ $F = P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\bar{E}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

3/ $G = P[(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})] = P(\bar{A}\cap B) + P(A\cap\bar{B})$

$- P[(\bar{A}\cap B)\cap(A\cap\bar{B})]$ (= 0)

$= P(B) - P(A\cap B) + P(A) - P(A\cap B)$.

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2-1+4-1}{8}$

$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ex 4:

1/ Tirage successif → arrangement
avec remise → avec rép.

$N = \alpha_4^3 = 4^3 = 64 = |\Omega|$.

2/ a/ $P(a) = \frac{\alpha_1^1 \times \alpha_1^1 \times \alpha_1^1}{|\Omega|} = \frac{1}{64}$

b/ $P(b) = \frac{\alpha_1^1 \times \alpha_1^1 \times \alpha_4^1}{|\Omega|} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$.

c/ $P(c) = \frac{(\alpha_4^1 \times \alpha_1^1 \times \alpha_4^1) \times 2}{|\Omega|} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

Ex5:

45 questions ↗ 22 justes.
↘ 23 hasard

La probabilité d'au moins 23 bonnes réponses.

A: "avoir au moins 1 bonne réponse parmi les 23 restantes".

$\bar{A}$: "aucune bonne réponse parmi les 23 restantes".

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{23} = 0{,}99$

5 possibilités pour chaque question et 1 seule est juste ⇒ donc 4 possibilités pour une réponse fausse

$P(\bar{A}) = \left(\frac{4}{5}\right)^{23}$.

Ex 6:

1/ $|\Omega| = C_{100}^4 \Rightarrow$

A: le candidat ne connait aucun sujet. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_{70}^4}{C_{100}^4}$

B.

2/ Le candidat sait traiter tous les sujets. $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_{30}^4}{C_{100}^4}$

$= 0,4 + 0,5 + 0,7 - (0,4 \times 0,5)$
$- (0,4 \times 0,7) - (0,5 \times 0,7)$
$+ (0,4 \times 0,5 \times 0,7).$

Ex 9 :

$P(1) = 2P = 2/7.$

$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/7$

$\sum P_i = 1.$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$

$2P + 5P = 1.$

$7P = 1$

$P = 1/7.$

$P(4,2,1) = P(4) \times P(2) \times P(1).$

$= 1/7 \times 1/7 \times 2/7$

$= 2/343.$ (4, 2, 1 sont indépendants)

Ex 12 :

BL : une face est blanche

BL_2 : la 2e face est blanche

$P(BL_2/BL) = \dfrac{P(BL_2 \cap BL)}{P(BL)} = \dfrac{2/4}{5/8}$



$P(BL) = P(BL/A) \times P(A) + P(BL/B) \times P(B)$
$+ P(BL/C) \times P(C) + P(BL/D) \times P(D)$ (→ 0)

$P(BL) = 1/4 + 1/4 + 1/8 + 0$

$= \dfrac{5}{8}$

$P(BL_2/BL) = 1/2 \times 8/5 = 8/10 = 4/5$

3/ C : le candidat peut traiter 3 sujets $\Rightarrow P(C) = \dfrac{C_{30}^3 \, C_{70}^1}{C_{100}^4}$

4/ D : au moins un sujet.

$P(D) = 1 - P(A).$

$= \dfrac{C_{30}^1 C_{70}^3 + C_{30}^2 C_{70}^2 + C_{30}^3 C_{30}^1 + C_{30}^4 C_{70}^0}{C_{100}^4}.$

Ex 7 :

1/ A et B sont compatibles : $P(A \cap B) = 0,2$

2/ A et B ne sont pas indépendants.

$P(A) \times P(B) = 0,15 \neq P(A \cap B) = 0,2.$

3/ $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 0,6.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,2 = 0,6.$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0,9.$

Ex 8 :

T_1 : atteindre au 1er tir. $P(T_1) = 0,4$

T_2 : atteindre au 2e tir $P(T_2) = 0,5$

T_3 : atteindre au 3e tir $P(T_3) = 0,7$

1/ Atteindre la cible qu'une fois après les trois tirs

$\Rightarrow$ Rater la cible au 1er tir et au 2nd et l'atteindre au 3e.

$P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) = P(\bar{T}_1) \times P(\bar{T}_2) \times P(T_3)$

2/ $P(T_1 \cup T_2 \cup T_3) = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3)$
$- P(T_1 \cap T_2) - P(T_1 \cap T_3) - P(T_2 \cap T_3)$
$+ P(T_1 \cap T_2 \cap T_3).$

QCM :

1/ $P(F) = 0,45$.

$P(D) = 0,6$.

$P(F \cap D) = 0,3$.

$P(\bar{F} \cap \bar{D}) = P(\overline{F \cup D}) = 1 - P(F \cup D)$

$= 1 - (0,45 + 0,6 - 0,3)$.

$= 0,25 = 25\%$

2/ a- $P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{4}{5} \cdot 10^{-4}$

$= \frac{8}{100000}$

b- Ils sont indépendants.

$P(C) \times P(B) = P(C \cap B)$.

$8/100000 \times 5/100 = 4/1000\,000$.